Theorie der durch Variationen des magnetischen Potentials induzierten Erdströme bei ungleichförmiger Leitfähigkeit der Erdrinde

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde genehmigt von der
Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Berlin

von

Hans Ertel
aus Berlin

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1932
Tag der Promotion: 7. Oktober 1932

51 §

Referenten: Prof. Dr. J. Bartels.
Prof. Dr. H. von Ficker.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung der mir von Herrn Prof. Bartels erteilten Anregung, die nur für eine homogene Rindenschicht gültige Chapmansche Theorie des Erdstroms für eine Rindenschicht mit ungleichförmiger Leitfähigkeit zu erweitern. Die Aufgabe wird in zweifacher Weise gelöst. Im ersten Teil wird ein vereinfachtes Erdmodell zugrunde gelegt (ohne Ozeane; Leitfähigkeit der Erdrinde räumlich so rasch variierend, daß der Mittelwert des Widerstandes über ein größeres Gebiet bereits gegen den mittleren Widerstand der ganzen Erdrinde konvergiert) und die Frage beantwortet, wie Chapmans, sich aus einem ortszeitlich variierenden Potential ableitende Lösung durch die angenommene Widerstandsverteilung modifiziert wird. Es tritt zur Chapmanschen Lösung einfach ein Widerstandsfaktor hinzu, der die von Gish und Rooney aufgezeigte Proportionalität zwischen Erdstromamplitude und Widerstand des Untergrundes an kurzen Erdstromleitungen verständlich macht und der auch eine Erklärung für die Differenzen zwischen berechneten und beobachteten Erdstromamplituden ermöglicht. Im zweiten Teil wird das Problem in voller Allgemeinheit gelöst. Entsprechend der Verstärkung des inneren Anteils des Potentials über den Ozeanen wird ein nicht ortszeitlich variierendes Potential angesetzt und eine stetige, sonst aber ganz beliebige Widerstandsverteilung zugelassen, welche die durch die unregelmäßige Verteilung von Land und Wasser bedingten Unterschiede der Leitfähigkeit völlig zu berücksichtigen gestattet. Die Lösung besteht dann aus zwei Termen: Der erste stellt die dem nicht ortszeitlich variierenden Potential entsprechende Verallgemeinerung der Chapmanschen Lösung dar; der zweite Term ist der Gradient eines skalaren Potentials und gibt den Beitrag der elektrostatischen Effekte, die sich infolge des Auftretens freier Raumladungen in den Gebieten, in denen der Widerstand variiert, einstellen. Das elektrostatische Potential wird aus einer Integro-Differentialgleichung berechnet und durch eine nach Multipol-Potentialen fortschreitende, absolut und gleichmäßig konvergente Reihe dargestellt.

Es sei mir gestattet, auch hier Herrn Prof. Bartels für seine wertvollen Anregungen und Ratschläge sowie für sein stetes Interesse an dieser Untersuchung meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

I. Teil. Spezielle Theorie der durch ortszeitlich variierendes Potential induzierten Erdströme in einer Rindenschicht mit räumlich rasch variierender Leitfähigkeit.

1. Voraussetzungen und Grundgleichungen.

Da die Phasendifferenzen und Amplitudenverhältnisse des äußeren und inneren Anteils des Potentials des erdmagnetischen Variationsfeldes mit der Annahme einer gleichförmigen elektrischen Leitfähigkeit des Erdkörpers nicht vereinbar sind, führte Chapman (8)[1]) die Hypothese ein, daß das Rindenstromsystem von dem des Erdkerns durch eine zirka 250 km dicke nichtleitende Schale getrennt ist. Nach dieser Vorstellung muß dann in geringer Tiefe unterhalb der Erdoberfläche eine Unstetigkeitsfläche der Leitfähigkeit existieren, an der die Normalkomponente des Stromes und damit die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke verschwindet. Dabei wollen wir die Frage offenlassen, ob diese Unstetigkeitsfläche mit der Basis der grundwasserführenden Schichten zusammenfällt, oder ob stratigraphische Faktoren, etwa die Lage schlechtleitender vulkanischer Tiefengesteine, dafür ausschlaggebend sind. Die Fläche möge völlig zusammenhängend und mit stetig sich drehender Tangentialebene versehen sein; ihre Tiefe, von der physischen Erdoberfläche $r = r(\vartheta, \lambda)$ nach unten positiv gerechnet, sei $\xi = \xi(\vartheta, \lambda)$, eine stetige Funktion der geographischen Koordinaten.

Wir wollen zunächst annehmen, daß Ozeane nicht vorhanden sind, um mit einem ortszeitlich variierenden Potential rechnen zu können. Zwischen der Erdoberfläche $r = r(\vartheta, \lambda)$ und der Unstetigkeitsfläche $\xi = \xi(\vartheta, \lambda)$ sollen also nur leitende Erdschichten vorhanden sein, deren Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(\vartheta, \lambda, z)$ sich im allgemeinen stetig ändern möge, aber in der Vertikalen z[2]) im Intervall $(0, \xi)$ auch eine endliche Anzahl Unstetigkeiten aufweisen darf.

Das in dieser Rindenschicht zirkulierende Stromsystem ist, wie aus der ersten Maxwellschen Gleichung[3]) für quasistationäre Vorgänge

$$c^2 \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\sigma \mathfrak{E}\ ^4) \tag{1}$$

folgt, quellenfrei, d. h. es gilt für jeden Bereich, in dem die Leitfähigkeit eine stetige und differenzierbare Funktion aller drei Koordinaten ist:

$$\operatorname{div}(\sigma \mathfrak{E}) = 0. \tag{2}$$

Da die Normalkomponente des Stromes, das ist

$$\sigma E_n = \frac{c^2}{4\pi} \cdot \operatorname{rot}_n \mathfrak{H},$$

für $z = 0$ und $z = \xi$ verschwinden muß, weil die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}$ nebst ihren Ableitungen nach den in die Tangentialebene fallenden Richtungen stetig sind und in den stromfreien Außenräumen für $\mathfrak{H}$ Potentiale existieren, folgt aus (2) durch Anwendung des Gauss'schen Satzes auf eine Säule vom Querschnitt $a^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\lambda$ und der Höhe ξ:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \int_0^{\xi} \sigma E_\vartheta \, dz\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^{\xi} \sigma E_\lambda \, dz = 0, \tag{3}$$

und diese Gleichung gilt auch dann, wenn die Säule $(0, \xi)$ eine endliche Anzahl Unstetigkeitsflächen von σ durchsetzt, weil an diesen Sprungflächen die Normalkomponenten des Stroms stetig sind. Es ist ein günstiger Umstand, daß diese unstetigen Änderungen der Leitfähigkeit mit der Tiefe berücksichtigt werden können, da dieselben, wie die zahlreichen Messungen von Gish und Rooney (14, 24, 25, 26; die Methodik dieser Messungen auch in 4, S. 574) zeigen, fast überall vorkommen.

---

[1]) Die eingeklammerten Zahlen hinter den Verfassernamen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Die Tiefe z werde nach unten positiv gezählt; $z = 0$ = Erdoberfläche.

[3]) Es ist aus relativitätstheoretischen Gründen klar, daß das vorliegende Problem mit den Maxwellschen Gleichungen „für ruhende Körper" (in der Sprache der vorrelativistischen Physik) behandelt werden muß; die von A. S. Sloutchanovsky (30) kürzlich veröffentlichte Anwendung der erweiterten Hertzschen Gleichungen auf erdmagnetische Probleme entbehrt der physikalischen Grundlage, denn unsere Messungsinstrumente ruhen relativ zur Erde.

[4]) Alle Größen im elektromagnetischen Maßsystem.

Die Gl. (3) gestattet eine wesentliche Vereinfachung, die darauf beruht, daß selbst für die gutleitenden Grundwasserschichten ($\sigma \sim 10^{-4}$ Ohm^{-1} cm^{-1}) ein Skin-Effekt nicht in Frage kommt. Das läßt sich abschätzen aus dem Integral der für eine Schicht mit der konstanten Leitfähigkeit σ geltenden Wirbelstromgleichung (1, S. 190; 12, S. 449):

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Der „Extinktionskoeffizient" $\varkappa_\nu = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega\nu}$ ($\omega = 2\pi/\text{Sonnentag}$) in dem die Abschwächung der ν-ten Partialamplitude bestimmenden Faktor $e^{-\varkappa_\nu z}$ hat mit $\sigma = 10^{-4}$ Ohm^{-1} cm^{-1} und $\mu = 1$ den Wert

$$\varkappa_\nu = 0{,}67 \cdot 10^{-3}\sqrt{\nu}\ (\text{km}^{-1}).$$

Die Amplitudenabschwächung der elektrischen Feldstärke mit der Tiefe ist also sehr gering, und das gleiche gilt für die dem $\varkappa_\nu$ proportionale Phasenänderung; da ferner an den (horizontalen) Unstetigkeitsflächen von σ im Intervall $(0, \xi)$ die E_ϑ und E_λ als Tangentialkomponenten stetig bleiben, können in Gl. (3) die elektrischen Feldstärken aus den Integralen herausgenommen und unter E_ϑ, E_λ fortan die Erdpotentialgradienten[1]) an der Erdoberfläche verstanden werden:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot E_\vartheta \cdot \int_0^\xi \sigma\,dz\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(E_\lambda \cdot \int_0^\xi \sigma\,dz\right) = 0. \tag{4}$$

Indem wir durch die Gleichung

$$w(\vartheta,\lambda) = \frac{1}{\int_0^\xi \sigma \cdot dz} \tag{5}$$

den Widerstand der stromführenden Schicht definieren, können wir für (4) auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{E_\vartheta}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{E_\lambda}{w}\right) = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Stromfunktion ψ, aus der sich die Erdpotentialgradienten wie folgt ableiten[2]):

$$E_\vartheta = -\frac{w(\vartheta,\lambda)}{a\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda};\quad E_\lambda = +\frac{w(\vartheta,\lambda)}{a}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}. \tag{7}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die Induktionsgleichung (2. Maxwellsche Gl.)

$$\frac{1}{a\sin\vartheta}\left(\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot E_\lambda)\right) = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{8}$$

erhält man:

$$w(\vartheta,\lambda)\cdot\Delta^*\psi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial w}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right) = a^2\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{9}$$

wenn Δ^* den zweidimensionalen Laplaceschen Operator bedeutet. Es sei noch daran erinnert, daß μH_z die Vertikalkomponente der magnetischen Induktion in der Erdrinde bedeutet.

Nun ist an der Erdoberfläche die Normalkomponente der magnetischen Induktion stetig; bedeutet also Φ das Potential des Variationsfeldes zwischen Erdoberfläche und Heavisideschicht, so gilt (die Permeabilität der Luft $= 1$ gesetzt):

$$\mu H_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial r},\ (\text{für } z = 0,\ \text{d. h. } r = a).$$

Infolge dieser Stetigkeitsbedingung nimmt (9) die Form an:

$$w(\vartheta,\lambda)\cdot\Delta^*\psi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial w}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial r}\right)_{r=a}. \tag{10}$$

Dies ist die Grundgleichung der erweiterten Theorie, und die Lösung des Problems reduziert sich somit auf die Ermittlung einer auf der ganzen Erdoberfläche stetigen, für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ regulären Strom-

[1]) Bezüglich des Ausdrucks „Erdpotentialgradienten" vgl. H. Benndorf, Atmosph. Elektrizität, S. 309 (Handb. d. Exp.-Phys., herausgegeben von Wien und Harms, Bd. 25, I. Teil).

[2]) Bei dieser Vorzeichenwahl umkreist der Strom Gebiete maximaler Stromfunktion im Uhrzeigersinne (von oben gesehen). Diese Vorzeichenwahl empfiehlt sich aus dem Grunde, weil für das Stromsystem der Heavisideschicht schon die entgegengesetzte Festsetzung eingeführt wurde (Bidlingmaier-Bartels, 5; Bartels, 2, S. 640), so daß sich dann die Magnetfelder der Ströme in den stromfreien Räumen addieren, wenn sich Maximalgebiete der Stromfunktionen superponieren. — Für die hier verfolgten Zwecke ist die Vorzeichenwahl belanglos.

funktion ψ, die der Diff.-Gl. (10) genügt, wenn $w(\vartheta, \lambda)$ eine vorgegebene Funktion der Koordinaten und $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a}$ eine vorgegebene Funktion der Koordinaten und der Zeit ist. Die gesuchten Erdpotentialgradienten ergeben sich dann aus dieser Funktion nach Gl. (7).

Um den Vergleich unserer Resultate mit Chapmans Theorie zu erleichtern, schließen wir uns nach Möglichkeit seiner Bezeichnungsweise an; wir schreiben also das Potential in der Form:

$$\Phi = a \sum_{1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ E_n^m \left(\frac{r}{a}\right)^n + J_n^m \left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} \right\} P_n^m (\cos\vartheta)\, e^{i m (\lambda + t)}, \tag{11}$$

worin E_n^m und J_n^m komplexe Konstanten bedeuten, die Amplitude und Phase des äußeren (E) und inneren (J) Anteils darstellen. Da t = Weltzeit (im Winkelmaß), ist $\lambda + t$ = Ortszeit; das durch (11) dargestellte Potential variiert also ortszeitlich, eine Annahme, die, wie Chapmans Theorie zeigt, den täglichen Gang des Erdpotentialgradienten qualitativ recht gut darstellt.

Bemerkungen zur Schreibweise: Alle Kugelfunktionsentwicklungen schreiben wir zweckmäßig in komplexer Form, also z. B.

$$F(\vartheta, \lambda) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{n} [a_n^m \cos(m\lambda) + b_n^m \sin(m\lambda)]\, P_n^m (\cos\vartheta)$$

in komplexer Schreibweise (vgl. Courant-Hilbert, 11, S. 47 und Chapman, 8, S. 51):

$$F(\vartheta, \lambda) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n^m\, e^{i m \lambda}\, P_n^m (\cos\vartheta)$$

mit

$$\alpha_n^m P_n^m = \tfrac{1}{2}(a_n^m - i\, b_n^m) P_n^m \qquad \text{für } m > 0.$$

$$\alpha_n^m P_n^m = \tfrac{1}{2}(a_n^{-m} + i\, b_n^{-m}) P_n^{-m} \qquad ,, \quad m < 0.$$

$$\alpha_n^0 P_n = a_n^0 P_n \qquad ,, \quad m = 0.$$

Dabei summieren wir, um nicht durch zu viele Indizes zu verwirren, über den Nebenindex m von $-\infty$ bis $+\infty$ statt von $m = -n$ bis $m = +n$, was erlaubt ist, da für $|m| > n$ alle P_n^m identisch verschwinden.

Aus (11) ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial r}\right)_{r=a} = \sum_{1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n^m P_n^m (\cos\vartheta)\, e^{i m (\lambda + t)}, \tag{12}$$

wenn zur Abkürzung

$$\varepsilon_n^m = i m \{n E_n^m - (n+1) J_n^m\} \tag{13}$$

gesetzt wird. Zwecks Ermittlung einer approximativen Lösung für ψ aus der Diff.-Gl. (10) berücksichtigen wir von der Stromfunktion ψ nur den ortszeitlich variierenden Anteil

$$\psi = \sum_{1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} h_n^m P_n^m (\cos\vartheta)\, e^{i m (\lambda + t)}, \tag{14}$$

wobei uns für diese Form der Näherungslösung folgender Gesichtspunkt maßgebend sein soll: Für lange Erdstromlinien (Telegraphenleitungen), längs deren man mit einem mittleren Widerstand $\bar{w}$ rechnen kann, soll die Lösung der erweiterten Theorie in Chapmans Lösung übergehen. Ersichtlich hat die so gewonnene Lösung nur orientierenden Charakter; sie soll uns auch vorläufig nur dazu dienen, zu zeigen, in welchem Sinne Chapmans Lösung, auf kurze Erdstromleitungen angewandt, durch die ungleichförmige Leitfähigkeit des Untergrundes modifiziert wird. Erst im 2. Teil der Arbeit soll das Problem in voller Allgemeinheit gelöst werden.

Damit der Widerstand $w(\vartheta, \lambda)$ längs einer langen Erdstromleitung gegen den Mittelwert $\bar{w}$ konvergiert, ist die Annahme nötig, daß der Widerstand räumlich sehr rasch und unregelmäßig variiert, was die Messungen von Gish und Rooney (14, 24, 25, 26) auch bestätigen. Verhält sich so der Erdboden nach Nippoldts Vergleich (20, S. 98) hinsichtlich des Widerstandes etwa wie ein Netz mit ungleichen Maschen, dann können wir folgende Annahme machen: Ist S ein größerer Teil der Erdoberfläche, aber hinsichtlich der Potentialverteilung doch so klein, daß sich das Potential in dem Gebiet S als lineare Funktion der Koordinaten darstellen läßt, so soll der Mittelwert

$$\bar{w} = \frac{1}{S} \iint w(\vartheta, \lambda)\, dS$$

derselbe sein, wo immer man auf der Erde ein solches Gebiet auswähle, eine Annahme, die natürlich nur für unsere idealisierte Erde ohne Ozeane zutreffen kann. Es soll mit andern Worten $\bar{w}$ von ϑ, λ unabhängig sein

und folglich den mittleren Widerstand der stromführenden Rindenschicht überhaupt repräsentieren. Es ist klar, daß dann auch der zonale Mittelwert über einen Breitenkreis $\pi/2 - \vartheta$:

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w \cdot d\lambda \tag{15}$$

von ϑ unabhängig ist, wovon wir unten Gebrauch machen werden. Hat also $w(\vartheta, \lambda)$ eine derartige Verteilung, so ist (wenigstens im Prinzip, vgl. Poincaré, 21, S. 498) eine Kugelfunktionsdarstellung für $w(\vartheta, \lambda)$ möglich:

$$w(\vartheta, \lambda) = \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s W_r^s P_r^s(\cos\vartheta)\, e^{is\lambda}, \tag{16}$$

worin, r, s statt m, n als Summationsindizes verwendet wurden, weil $w(\vartheta, \lambda)$ als Faktor in die Gl. (10) eingeht.

2. Lösung.

Substituieren wir (12), (14) und (16) in (10) und beachten die Relation

$$\Delta^*(P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda}) = -n(n+1) P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda},$$

so resultiert:

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s n(n+1) h_n^m W_r^s P_n^m P_r^s e^{im(\lambda+t)+is\lambda} \\ &+\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s h_n^m W_r^s \frac{\partial P_n^m}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial P_r^s}{\partial\vartheta}\cdot e^{im(\lambda+t)+is\lambda} \\ &-\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \frac{(m\cdot s)}{\sin^2\vartheta}\cdot h_n^m W_r^s P_n^m P_r^s \cdot e^{im(\lambda+t)+is\lambda} \end{aligned}\right\} = a^2 \sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \varepsilon_n^m P_n^m e^{im(\lambda+t)}, \tag{17}$$

welche Gleichung ersichtlich nur dann bestehen kann, wenn $W_r^s = 0$ für $s \neq 0$. Denn haben wir eine Gleichung von der Form

$$\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s A(\vartheta)_{n,r}^{m,s} e^{i(m+s)\lambda+imt} = \sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m B(\vartheta)_n^m e^{im(\lambda+t)},$$

so ergeben die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-\mu)\lambda}\, d\lambda = \delta_\mu^m, \quad \begin{cases} \delta_\mu^m = 0, & m \neq \mu. \\ \delta_\mu^m = 1, & m = \mu. \end{cases}$$

sofort:

$$\sum_1^{\infty}{}_n \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s A_{n,r}^{\mu-s,s}\cdot e^{i(\mu-s)t} = \sum_1^{\infty}{}_n B_n^\mu e^{i\mu t};$$

oder, da μ eine feste (ganze) Zahl ist, über die nicht summiert wird:

$$\sum_1^{\infty}{}_n \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s A_{n,r}^{\mu-s,s} e^{-ist} = \sum_1^{\infty}{}_n B_n^\mu,$$

woraus wegen $0 \leq t \leq 2\pi$ obige Behauptung folgt.

Somit ergibt sich aus (17):

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m n(n+1) h_n^m P_n^m e^{im(\lambda+t)}\cdot\left(\sum_0^{\infty}{}_r W_r^0 P_r\right) \\ &+\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m h_n^m \frac{\partial P_n^m}{\partial\vartheta}\cdot e^{im(\lambda+t)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sum_0^{\infty}{}_r W_r^0 P_r\right) \end{aligned}\right\} = a^2 \sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \varepsilon_n^m P_n^m e^{im(\lambda+t)}. \tag{18}$$

Aus (16) ergibt sich, daß der in (18) auftretende Ausdruck

$$\sum_0^{\infty}{}_r W_r^0 P_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_0^{\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s W_r^s P_r^s e^{is\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\, d\lambda = \bar{w} \tag{19}$$

den Mittelwert des Widerstandes längs des Breitenkreises $\pi/2 - \vartheta$ darstellt, der nach obigen Erörterungen (S. 7) von ϑ unabhängig ist, so daß sich wegen (19) die Gl. (18) auf

$$\sum_1^{\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m [a^2 \varepsilon_n^m + n(n+1)\,\bar{w}\, h_n^m] P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im(\lambda+t)} = 0 \tag{20}$$

reduziert. Hieraus folgt aber das identische Verschwinden der Koeffizienten [. . .], da eine Kugelfunktionsentwicklung nur auf einerlei Art möglich ist (F. Neumann, 18, S. 59). Die gesuchten Entwicklungskoeffizienten des ortszeitlichen Anteils der Stromfunktion sind also durch

$$h_n^m = -\frac{a^2 \varepsilon_n^m}{\bar{w} \cdot n(n+1)} \tag{21}$$

gegeben. Dann folgen aus der Stromfunktion, die sich wegen (13) zu

$$\psi = -\frac{i a^2}{\bar{w}} \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{J_n^m}{n} \right\} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{i m(\lambda+t)} \tag{22}$$

ergibt, die Erdpotentialgradienten nach (7):

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= -\frac{w(\vartheta,\lambda)}{\bar{w}} \cdot \frac{a}{\sin\vartheta} \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m^2 \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{J_n^m}{n} \right\} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{i m(\lambda+t)}, \\ E_\lambda &= -\frac{w(\vartheta,\lambda)}{\bar{w}} \cdot a\, i \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{J_n^m}{n} \right\} \frac{\partial P_n^m(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}\, e^{i m(\lambda+t)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Diese Lösung unterscheidet sich von dem von Chapman und Whitehead (9, S. 471) auf ganz anderem Wege gewonnenen Resultat um den Faktor $w(\vartheta, \lambda)/\bar{w}$, worin also $w(\vartheta, \lambda)$ den Widerstand der stromführenden Schicht am Messungsort bedeutet. Ersichtlich können die Lösungen (23) als Produkt der „Potentialanteile“

$$\begin{aligned} \Pi_\vartheta &= -\frac{a}{\sin\vartheta} \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m^2 \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{J_n^m}{n} \right\} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{i m(\lambda+t)}, \\ \Pi_\lambda &= -i a \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{J_n^m}{n} \right\} \frac{\partial P_n^m(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}\, e^{i m(\lambda+t)}, \end{aligned} \tag{24}$$

die zugleich die Chapmanschen Lösungen für die in einer homogenen Rindenschicht induzierten Erdpotentialgradienten sind, mit dem örtlich stark variierenden „Widerstandsfaktor“ $w(\vartheta, \lambda)/\bar{w}$ aufgefaßt werden.

Substituiert man die Lösung (22) in (10), so folgt mit Rücksicht auf (16):

$$\bar{w} \cdot \Delta^* \psi = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial r} \right)_{r=a}, \tag{25}$$

wenn man beachtet, daß Φ nur ortszeitlich variieren soll und somit von der s-Summation nur der Index $s = 0$ beibehalten werden kann. Es zeigt sich somit, daß durch die Forderung eines rein ortszeitlich variierenden Potentials die Diff.-Gl. (10) durch Fortfall der örtlich stark variierenden Widerstandsterme auf (25) „geglättet“ wird. Dieses rein formale Ergebnis wird durch folgende physikalische Betrachtung evident: Geht man in die Induktionsgleichung (8) mit einem H_z ein, das sich aus einem durch Ausgleichung über größere Gebiete gewonnenen Potential (11) ableitet, so können die induzierten Potentialgradienten auch nur „ausgeglichenen“ Charakter haben; wir bezeichnen sie mit $\bar{E}_\vartheta$, $\bar{E}_\lambda$, und es gilt somit:

$$\frac{1}{a \sin\vartheta} \left(\frac{\partial \bar{E}_\vartheta}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta \cdot \bar{E}_\lambda) \right) = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{26}$$

Bilden wir nun aus den Gl. (7):

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= -\frac{w(\vartheta,\lambda)}{a \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{w(\vartheta,\lambda)}{\bar{w}} \cdot \Pi_\vartheta, \\ E_\lambda &= +\frac{w(\vartheta,\lambda)}{a} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \frac{w(\vartheta,\lambda)}{\bar{w}} \cdot \Pi_\lambda, \end{aligned}$$

die $\bar{E}_\vartheta$, $\bar{E}_\lambda$ durch Mittelbildung über das (S. 6 definierte) Gebiet S, in welchem die Potentialanteile Π_ϑ, Π_λ annähernd konstant sind (in S kann ja Φ durch eine lineare Funktion approximiert werden), $w(\vartheta, \lambda)$ aber gemäß

$$\frac{1}{S} \iint w(\vartheta,\lambda) \cdot dS \to \bar{w}$$

entsprechend den Voraussetzungen S. 6 gegen den Mittelwert des Widerstandes konvergiert, so folgt

$$\begin{aligned} \bar{E}_\vartheta &= -\frac{\bar{w}}{a \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \\ \bar{E}_\lambda &= +\frac{\bar{w}}{a} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \end{aligned} \tag{27}$$

und aus (26) und (27) ergibt sich die Gl. (25):

$$\bar{w} \cdot \Delta^* \psi = a^2 \mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_{z=0} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial r} \right)_{r=a},$$

deren auf der ganzen Erdoberfläche stetige und reguläre Lösung durch (22) dargestellt wird.

Aus der erweiterten Theorie muß sich Chapmans Lösung (24) als Spezialfall ergeben; in der Tat folgt dies mit $\sigma = \text{konst.}$, $\xi = \text{konst.}$, also $w = \text{konst.} = \bar{w}$ sofort aus (23). Man beachte jedoch, daß auch

$$w = \frac{1}{\int_0^{\xi(\vartheta,\lambda)} \sigma \cdot dz} = \text{konst.} = \bar{w}$$

allein bereits zur Lösung (23) führt, d. h.: Chapmans Lösung würde auch für eine Schicht mit variabler Leitfähigkeit und Dicke gelten, wenn nur die Dicke derart variiert, daß der durch (5) definierte Widerstand konstant ist. Jedoch ist die bekannte Unstimmigkeit zwischen theoretischen und beobachtetenAmplituden des Erdstroms (Chapman und Whitehead, 10) nur mit der Annahme variablen Widerstandes der stromführenden Rindenschicht erklärbar, worauf wir unten noch zurückkommen.

3. Erweiterung der Lösung durch Berücksichtigung der Anisotropie des Untergrundes.

Für die Anwendung der Theorie auf die an kurzen Erdstromleitungen erhaltenen Messungsergebnisse bedürfen die Gleichungen (23), die wir wegen (24) in der Form

$$E_\vartheta = \frac{w(\vartheta,\lambda)}{\bar{w}} \cdot \Pi_\vartheta, \quad E_\lambda = \frac{w(\vartheta,\lambda)}{\bar{w}} \cdot \Pi_\lambda \tag{28}$$

schreiben, noch einer Erweiterung für den Fall anisotropen Untergrundes; die obigen Gl. (28) können nur dann gelten, wenn der Widerstand im Bereich der Messungsanlage isotrop ist. Die Messungen von Gish und Rooney (14, 24, 25, 26) haben jedoch gezeigt, daß die Leitfähigkeit der Erdrinde selbst in dem Gebiet kurzer Erdstromleitungen (2—3 km) sowohl in der Horizontalen als auch in der Vertikalen erheblichen Änderungen unterliegt und somit in den verschiedenen Richtungen verschieden ist. Daher ändert sich der durch (5) definierte Widerstand in der Horizontalen selbst dann, wenn die Dicke ξ im Gebiet der Messungsanlage konstant ist.

Nun sind die gemessenen Komponenten $(E_\vartheta^*, E_\lambda^*)$ des Erdpotentialgradienten die elektromotorischen Kräfte pro Einheit der Elektrodenabstände (l_ϑ, l_λ), d. h.:

$$E_\vartheta^* = \frac{1}{l_\vartheta} \int_{-\frac{l\vartheta}{2}}^{+\frac{l\vartheta}{2}} E_\vartheta \, dl_\vartheta, \quad E_\lambda^* = \frac{1}{l_\vartheta} \int_{-\frac{l\lambda}{2}}^{+\frac{l\lambda}{2}} E_\lambda \, dl_\lambda.$$

Substituieren wir in diese Gleichung die Ausdrücke (28), bezeichnen mit

$$w_\vartheta = \frac{1}{l_\vartheta} \int_{-\frac{l\vartheta}{2}}^{+\frac{l\vartheta}{2}} w \, dl_\vartheta, \quad w_\lambda = \frac{1}{l_\lambda} \int_{-\frac{l\lambda}{2}}^{+\frac{l\lambda}{2}} w \, dl_\lambda \tag{29}$$

die Mittelwerte des Widerstandes längs der l_ϑ- bzw. l_λ-Leitung, die wegen der Kürze der Leitungen noch nicht gegen den Mittelwert $\bar{w}$ konvergieren, und beachten, daß im Bereich kurzer Leitungen die Potentialanteile Π_ϑ, Π_λ als konstant angesehen werden dürfen, so folgt:

$$E_\vartheta^* = \frac{w_\vartheta}{\bar{w}} \cdot \Pi_\vartheta, \quad E_\lambda^* = \frac{w_\lambda}{\bar{w}} \cdot \Pi_\lambda, \tag{30}$$

womit die allgemeineren, auch für anisotropen Untergrund gültigen Gleichungen gewonnen sind[1]).

4. Diskussion der Lösung.

Die Formeln (23) bzw. (30) bringen in klarer Weise den kosmisch-tellurischen und gleichzeitig lokalen Charakter der durch tagesperiodische Variationen des magnetischen Potentials induzierten Erdströme (in kurzen Leitungen) zum Ausdruck. Der Typus des tagesperiodischen Verlaufs wird durch die Potentialanteile

[1]) Beiläufig sei hier bemerkt, daß die von Gish (13, S. 92f.) angegebenen Transformationsformeln für die Potentialgradienten in nicht orthogonalen Erdstromleitungen durch die Anisotropie des Untergrundes selbstverständlich nicht modifiziert werden, weil sich diese Transformation auf beobachtete Komponenten bezieht.

Π_ϑ, Π_λ bestimmt[1]). Da beide Komponenten der Chapmanschen Lösung vollkommen entsprechen, stellt somit die erweiterte Theorie den täglichen Gang, von den Amplituden abgesehen, in derselben Weise wie Chapmans Theorie dar, die bekanntlich den beobachteten täglichen Gang qualitativ in zufriedenstellender Weise wiedergibt, da der beobachtete Gang völlig dem Typus entspricht, den man erwarten muß, wenn dieser als Induktionswirkung der täglichen erdmagnetischen Variation aufgefaßt wird (Bartels, 2, S. 646). Daß dies nicht nur für Mittelwerte gilt, sondern daß auch die außerordentlich geringe magnetische Variation an ruhigen Tagen mit entsprechenden Schwankungen des Erdpotentialgradienten zusammenfällt, haben Bartels und Rooney (6) kürzlich an den Registrierungen von Watheroo (Australien) zeigen können.

Die Phasendifferenzen zwischen Rechnung und Beobachtung (besonders bei der Westkomponente) dürften nach Chapman und Bartels (9, S. 481; 10, S. 126; 2, S. 646) durch den Einfluß der weniger gut stimmenden höheren harmonischen Glieder in H_z sowie durch die Voraussetzung eines nur ortszeitlich variierenden Potentials bedingt sein. Es liegt jedoch auch vom Standpunkt der erweiterten Theorie kein Grund vor, wegen dieser Phasendifferenzen die Chapmansche Hypothese (der Induktion der Erdströme durch magnetische Variationen) als unzutreffend abzulehnen, wozu A. Nippoldt neigt (20, S. 140), und zwar um so weniger, als die zunächst merkwürdige Amplitudendiskrepanz zwischen Chapmans Theorie und den Beobachtungen in Tortosa (Ebro) durch die erweiterte Theorie behoben werden kann.

Die Amplituden des Erdstroms (in kurzen Leitungen) sind ja, da sie nach den Gleichungen (23) bzw. (30) dem Widerstand der Stromschicht am Messungsort direkt proportional sind, eine typisch lokale Erscheinung. Dieses Ergebnis der Theorie wird in schöner Weise durch die von Gish und Rooney (16) diskutierten Erdstrombeobachtungen in Huancayo (Peru) bestätigt, natürlich nur qualitativ, weil die von der Theorie als zur quantitativen Bestimmung der Amplituden erforderlich erkannte Schichtdicke ξ (in Gl. 5) bisher noch nicht ermittelt wurde. In Huancayo wird der Erdstrom an zwei zirka 3,5 km entfernten Stationen simultan registriert. Der Widerstand des Untergrundes an der westlichen, in der Pampa Paccha gelegenen Station (vgl. Lageplan in Terr. Magn. 1930, S. 63, 215) ist größer als derjenige der östlichen Station in der Pampa Sicaya, und in der Tat sind die Amplituden des Erdstroms in der Pampa Paccha stets größer als in der Pampa Sicaya, während der Verlauf und die Phasen an beiden Stationen übereinstimmen. Besonders auffällig ist dieser Unterschied bei der W-E-Komponente, die in der Pampa Paccha um 75 % größer ist als in der Pampa Sicaya. Gish und Rooney (26, S. 61) konnten nachweisen, daß dieser Amplitudenvergrößerung an der westlichen Station eine starke Zunahme des Widerstandes nach Westen parallel geht. Nach Verkürzung der Leitung (um zirka 1,2 km) durch Ausschaltung des westlichen, im Gebiet hohen Widerstandes gelegenen Teils derselben war die Amplitude nur noch 20 % größer als in der Pampa Sicaya. Diese Tatsachen sind auf Grund der erweiterten Theorie in zwangloser Weise verständlich: Der Verlauf und die Phasen des Erdstroms hängen ja allein von den Potentialanteilen Π_ϑ, Π_λ ab, die für zwei nur zirka 4 km entfernte Stationen identisch sind; die Amplituden müssen dagegen nach (23) bzw. (30) im Gebiet größeren Widerstandes ebenfalls größer sein. Daß natürlich der von Gish und Rooney gemessene „spezifische Widerstand" und der durch (5) definierte „Widerstand der ganzen Stromschicht" nicht identisch, sondern bestenfalls einander proportional sind, bedarf wohl keiner Erörterung. Die von Gish und Rooney gemachte (und für körperliche Ströme durchaus nicht selbstverständliche) Bemerkung, daß ". . . for a given current, the recorded potential will be directly proportional to the resistance of the ground in that region" (26, S. 61), wird durch die erweiterte Lösung auch theoretisch gerechtfertigt und dahin präzisiert, daß unter "resistance" die durch Gl. (5) definierte Größe verstanden werden muß, während der „gegebene Strom" derjenige ist, der in langen Leitungen induziert wird (längs denen der Mittelwert von w nämlich gleich $\bar{w}$ ist).

Der Amplitudenfaktor $w/\bar{w}$ bietet auch eine Möglichkeit zur Erklärung der Diskrepanz zwischen theoretischen und beobachteten Amplituden in Tortosa (Chapman und Whitehead, 10). Da die beob-

[1]) Es sei hier gleich erklärt, warum in die Lösungen (23), (24) sowie auch in die später zu entwickelnde allgemeine Lösung immer das aus dem beobachteten $\mathfrak{H}$ abgeleitete Potential Φ und nicht das erregende Potential allein eingeht. Das hat seinen Grund in dem Vorhandensein eines leitenden Erdkerns. In einem endlichen (in unserm Fall durch die Erdoberfläche abgeschlossenen) Raum ist nämlich die Lösung der Maxwellschen Gleichungen nur eindeutig bestimmt, wenn außer dem Anfangszustand an jedem Punkt der Oberfläche die Komponenten von $\mathfrak{E}$ in der Richtung der Tangentialebene der Oberfläche für alle Zeit gegeben sind (Riemann-Weber, 27, Bd. I, S. 415); dann ist aber durch die Induktionsgleichung (8) H_z an der Oberfläche für alle Zeit bestimmt. Nun werden in unserem Problem die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ gerade gesucht, und in der Tat ist die gegebene Lösung die direkte Umkehrung der aus der Eindeutigkeitsbedingung folgenden Bestimmung von H_z, denn wir fragen ja: Wie müssen die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ gegeben sein, damit die Induktionsgleichung gilt bei vorgegebenem H_z? Fehlt der Erdkern, so lassen sich die in der (dünnen) Erdrinde abspielenden elektromagnetischen Vorgänge als Erscheinungen an der Begrenzung eines unendlichen Feldes (Außenraum) behandeln, und dann ist durch den Anfangszustand der weitere Verlauf der Erscheinung vollständig bestimmt. Nur dann läßt sich durch die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie das gesamte Potential durch das erregende Potential allein ausdrücken.

achteten Amplituden das 5- bis 6fache der theoretischen betragen, würde durch $w/\bar{w} = 5$ oder 6 die Unstimmigkeit behoben sein. Tatsächlich ist ja der spezifische Widerstand des Untergrundes in Tortosa sehr hoch; der Mittelwert bis 300 m Tiefe beträgt etwa 12 000 Ohm · cm gegenüber 8—11 000 Ohm · cm in Huancayo (Gish und Rooney, 26) und 2400 Ohm · cm in Watheroo (Gish und Rooney, 25) für dieselbe Schichtdicke. Die Amplituden des täglichen Ganges (Jahresmittel der Nordkomponente) nehmen von 15,1 Millivolt/km in Tortosa (Puig, 23, S. 72) über 2,83 in Huancayo auf 1,14 für Watheroo ab (Gish und Rooney, 15, 16). Der Vergleich der Amplituden mit den entsprechenden Mittelwerten des spezifischen Widerstandes an diesen drei Stationen zeigt jedoch schon, daß der spezifische Widerstand allein für die Amplituden nicht bestimmend ist[1]), sondern auch die Dicke der Stromschicht offensichtlich berücksichtigt werden muß und daß, solange diese unbekannt ist, eine quantitative Übereinstimmung zwischen theoretischen und beobachteten Amplituden nicht zu erzielen ist.

Wählen wir in (29) die Erdstromleitungen genügend lang, so daß die Widerstände w_ϑ, w_λ gegen den mittleren Widerstand $\bar{w}$ konvergieren, so ergibt (30) die Chapmanschen Lösungen

$$E^*_\vartheta = \Pi_\vartheta, \quad E^*_\lambda = \Pi_\lambda, \tag{31}$$

die somit für lange Leitungen unter den S. 6 gemachten Voraussetzungen über die Leitfähigkeit der Erdkruste gelten. Bei Erdstromanlagen mit kurzen Leitungen ist die Amplitude dagegen von dem Widerstand des Untergrundes an der Station abhängig, aber viele Stationen, über das S. 6 definierte Gebiet S verteilt, würden im Mittel auch die Chapmanschen Werte (31) liefern.

5. Eine andere einfache Ableitung der Chapmanschen Formeln.

Die Chapman-Whiteheadschen Formeln (24) für die Komponenten des Erdpotentialgradienten ergeben sich in besonders einfacher Weise nach einer Methode, die kurz wiedergegeben werde, weil eine Verallgemeinerung derselben auch die Lösung für den Fall des nicht ortszeitlich variierenden Potentials, wie es durch die Anwesenheit der gutleitenden Ozeane auf der Erde bedingt ist, ermöglicht. Wegen der Stetigkeit der tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke an der Erdoberfläche ($r = a$) genügt nämlich die Bestimmung der in der Atmosphäre induzierten elektrischen Feldstärken; deren Horizontalkomponenten geben für $r = a$ sofort die gesuchten Erdpotentialgradienten.

Vernachlässigen wir mit Chapman elektrostatische Effekte, so gilt in der Atmosphäre (zwischen Erdoberfläche und Heavisideschicht):

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \tag{32}$$

wobei sich $\mathfrak{E}$ aus dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ gemäß

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \tag{33}$$

ableiten läßt. Wenn der Erdkörper hinsichtlich der Leitfähigkeit homogen ist oder aus Kugelschalen verschiedener Leitfähigkeit bestehend gedacht wird, haben die induzierten Ströme keine radiale Komponente (H. Hertz, 17, S. 36; A. T. Price, 22, S. 217f.). Da ferner die induzierenden Ströme der Heavisideschicht als parallel der Erdoberfläche fließend betrachtet werden können, ist im ganzen Raume $A_r = 0$, also nach (33) auch $E_r = 0$, so daß sich (32) auf

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta \cdot E_\vartheta) + \frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = 0$$

reduziert, woraus die Existenz einer Funktion ψ (nicht mit der oben verwendeten Stromfunktion zu verwechseln!) folgt, aus der sich E_ϑ, E_λ gemäß

$$E_\vartheta = -\frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad E_\lambda = +\frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \tag{34}$$

bestimmen lassen, wobei E_ϑ, E_λ gleich die Werte für $r = a$ bedeuten mögen. Die Induktionsgleichung (8) gibt für $r = a$ mit Rücksicht auf

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial r}\right)_{r=a}$$

[1]) Denn sonst müßten sich z. B. die spez. Widerstände Tortosa : Watheroo verhalten wie 15,1 : 1,14 = 13,2, da für das Jahresmittel $\sim$ mittl. Solstitium = ½ (Sommer + Winter) die Potentialanteile für Tortosa (40,8° N. Br.) und Watheroo (30,3° S. Br.) weitgehend übereinstimmen müssen; vgl. den täglichen Gang von H_z für verschiedene Breiten bei Bartels, 2, S. 628, und Chapmans Formel in 10, S. 126.

und die Gleichungen (12) und (34):

$$\Delta^* \psi = a^2 \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \varepsilon_n^m P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im(\lambda+t)},$$

woraus man nach Entwicklung von ψ in eine Kugelfunktionsreihe sofort die Lösung

$$\psi = -a^2 \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{\varepsilon_n^m}{n(n+1)} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im(\lambda+t)}$$

oder wegen (13):

$$\psi = -i a^2 \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{J_n^m}{n} \right\} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im(\lambda+t)}$$

erhält, die in (34) substituiert, zu der Chapmanschen Lösung (24) führt.

II. Teil. Allgemeine Theorie der durch Variationen des magnetischen Potentials induzierten Erdströme in einer Rindenschicht mit beliebiger Leitfähigkeitsverteilung.

1. Die notwendigen Verallgemeinerungen.

Bei Anwendung auf den allgemeinen Fall des nicht ortszeitlich variierenden Potentials (Verstärkung des inneren Anteils desselben über den Ozeanen; vgl. Bartels, 2, S. 645) ist die eben skizzierte Methode in dreifacher Hinsicht zu verallgemeinern:

Erstens muß in der Induktionsgleichung das ortszeitlich variierende Potential (11) ersetzt werden durch

$$\Phi = a \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left\{ E_n^m(t) \left(\frac{r}{a}\right)^n + J_n^m(t) \left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} \right\} P_n^m(\cos\vartheta) \cdot e^{im\lambda}, \tag{35}$$

worin die Koeffizienten Funktionen der Weltzeit sind. Mit der Abkürzung

$$\varepsilon_n^m(t) = \left\{ n \frac{\partial E_n^m}{\partial t} - (n+1) \frac{\partial J_n^m}{\partial t} \right\} \tag{36}$$

wird dann

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial r}\right)_{r=a} = \sum_1^\infty{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \varepsilon_n^m(t) P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda}; \tag{37}$$

es müssen also zwecks Berechnung der z. B. durch tagesperiodische Variationen induzierten Ströme Potentialentwicklungen etwa für alle Stunden vorliegen; da dies zur Zeit noch nicht der Fall ist, kann hier nur die Theorie entwickelt werden.

Zweitens müssen elektrostatische Effekte berücksichtigt werden, da wegen der Quellenfreiheit des Rindenstromsystems die Gebiete, in denen die Leitfähigkeit variiert, nun als Quellen freier Raumladungen auftreten. Es kann dann $\mathfrak{E}$ nicht mehr aus einem Vektorpotential allein abgeleitet werden.

Drittens kann nicht mehr $A_r = 0$ und damit $E_r = 0$ gesetzt werden, weil radiale Stromkomponenten dort auftreten, wo die Leitfähigkeit in der Horizontalen variiert, also hauptsächlich in den Küstengebieten. Die eingangs erwähnte Unstetigkeitsfläche der Leitfähigkeit (vgl. S. 4) haben wir uns nämlich an den Küsten stetig in den Meeresboden übergehend vorzustellen, der eine ausgesprochene Unstetigkeitsfläche der Leitfähigkeit vorstellt. Unter der Schichtdicke $\xi(\vartheta, \lambda)$ in Gl. (5) ist also, wenn der Punkt (ϑ, λ) ein ozeanischer ist, die Meerestiefe daselbst zu verstehen. Die Ozeane sind also ganz stromerfüllt (Skin-Effekt kommt nach S. 5 nicht in Frage) und die mit stetig sich drehender Tangentialebene zu denkende Fläche $\xi = \xi(\vartheta, \lambda)$ schließt das Stromsystem der kontinentalen Rindenschicht und der Ozeane gegen die den leitenden Erdkern umhüllende nichtleitende Zwischenzone ab.

2. Lösung (ohne spezielle Bestimmung des elektrostatischen Potentials φ).

Indem wir gleich noch die in der Atmosphäre vorhandene Raumladungsdichte ϱ berücksichtigen, gilt in der Atmosphäre:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho,$$

oder in Polarkoordinaten:

$$\frac{1}{a\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta)+\frac{\partial E_\lambda}{\partial\lambda}\right\}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)=4\pi\varrho, \tag{38}$$

für $r = a$.

Wir setzen

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)=4\pi\bar{\varrho},$$

dann gibt (38):

$$\frac{1}{a\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta)+\frac{\partial E_\lambda}{\partial\lambda}\right\}=4\pi(\varrho-\bar{\varrho}). \tag{39}$$

Die Größen ϱ und $\bar{\varrho}$ sind jede für sich im Prinzip experimentell bestimmbar; ϱ nach der Käfigmethode (geerdeter Drahtkäfig mit Potentialsonde im Mittelpunkt, vgl. z. B. Schweidler, 29, S. 341), $\bar{\varrho}$ mittels drei äquidistanter Potentialsonden in derselben Vertikalen. Die Differenz $\varrho-\bar{\varrho}$ liegt allerdings weit unterhalb der Meßgenauigkeit jeder einzelnen der beiden Methoden, was hier jedoch nebensächlich ist, da $\varrho-\bar{\varrho}$ nachher durch meßbare Größen ausgedrückt werden wird.

Durch

$$\frac{1}{a^2}\Delta^*\varphi=-4\pi(\varrho-\bar{\varrho}) \tag{40}$$

wird ersichtlich ein elektrostatisches Potential definiert; dann folgt aus (39) und (40):

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\left(E_\vartheta+\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{E_\lambda+\frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right\}=0,$$

woraus sich weiter ergibt:

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= -\frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},\\ E_\lambda &= +\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}-\frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \end{aligned} \tag{41}$$

worin also E_ϑ, E_λ die mit den Komponenten des Erdpotentialgradienten identischen horizontalen Komponenten der elektrischen Feldstärke in der Atmosphäre für $r = a$ bedeuten. Die Induktionsgleichung für $r = a$, die mit Rücksicht auf (37) die Form

$$\frac{1}{a\sin\vartheta}\left(\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot E_\lambda)\right)=-\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m\varepsilon_n^m(t)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{imt}$$

annimmt, gestattet durch Substitution von (41) die Bestimmung der Funktion ψ aus der Gleichung

$$\Delta^*\psi=a^2\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m\varepsilon_n^m(t)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{imt}.$$

Man erhält durch Kugelfunktionsentwicklung von ψ sofort:

$$\psi=-a^2\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m\frac{\varepsilon_n^m(t)}{n(n+1)}P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{imt},$$

oder mit Rücksicht auf (36):

$$\psi=-a^2\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m\left\{\frac{1}{n+1}\frac{\partial E_n^m}{\partial t}-\frac{1}{n}\frac{\partial J_n^m}{\partial t}\right\}P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{imt}. \tag{42}$$

Damit lassen sich die Erdpotentialgradienten (41) schreiben:

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= +\frac{ia}{\sin\vartheta}\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m\left\{\frac{1}{n+1}\frac{\partial E_n^m}{\partial t}-\frac{1}{n}\frac{\partial J_n^m}{\partial t}\right\}\cdot m\cdot P_n^m\cdot e^{imt}-\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},\\ E_\lambda &= -a\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m\left\{\frac{1}{n+1}\frac{\partial E_n^m}{\partial t}-\frac{1}{n}\frac{\partial J_n^m}{\partial t}\right\}\frac{\partial P_n^m}{\partial\vartheta}\cdot e^{imt}-\frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}. \end{aligned} \tag{43}$$

In den ersten Termen der rechten Seite erkennt man die für nicht ortszeitlich variierendes Potential verallgemeinerten Chapmanschen Lösungen (24); der hinzukommende Gradient von φ stellt die elektrostatischen Effekte dar.

Durch (43) ist das Problem noch nicht vollständig gelöst, da das skalare Potential φ noch unbestimmt ist; die Bestimmung desselben ist mittels einer Integro-Differentialgleichung möglich.

3. Integro-Differentialgleichung für φ.

In der Atmosphäre (zwischen Erdoberfläche und Heavisideschicht) gilt (39):

$$\frac{1}{a\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta)+\frac{\partial E_\lambda}{\partial\lambda}\right\}=4\pi(\varrho-\bar{\varrho}),$$

und in der leitenden Rindenschicht nach Gl. (6):

$$\frac{1}{a\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta)+\frac{\partial E_\lambda}{\partial\lambda}\right\}=E_\vartheta\cdot\frac{\partial\ln w}{a\,\partial\vartheta}+E_\lambda\cdot\frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\ln w}{\partial\lambda}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt wegen der Stetigkeit der E_ϑ, E_λ für $r=a$:

$$\frac{E_\vartheta}{a}\cdot\frac{\partial W}{\partial\vartheta}+\frac{E_\lambda}{a\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial W}{\partial\lambda}=4\pi(\varrho-\bar{\varrho}),\tag{44}$$

worin abkürzend $\ln w = W$ gesetzt wurde[1]). Aus (40) und (44) resultiert die Gleichung

$$-\Delta^*\varphi=a\left(E_\vartheta\cdot\frac{\partial W}{\partial\vartheta}+\frac{E_\lambda}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right),$$

die durch Substitution von (41) in

$$\Delta^*\varphi=\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial W}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)$$

übergeht, wofür wir

$$\Delta^*\varphi=\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial W}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+(\operatorname{grad} W\cdot\operatorname{grad})\varphi\tag{45}$$

schreiben wollen, unter $(\operatorname{grad} W\cdot\operatorname{grad})$ den (zweidimensionalen) Operator

$$(\operatorname{grad} W\cdot\operatorname{grad})\equiv\left(\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)$$

verstanden.

Der erste Term der rechten Seite von (45) enthält nur bekannte Größen, denn $W=\ln w$ enthält die als bekannt vorauszusetzende Widerstandsverteilung der leitenden Schicht, ψ ist nach (42) durch das Potential der Variation bestimmt. Wir können also diesen Term nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial W}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)=\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m R_n^m(t)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{im\lambda}.\tag{46}$$

Ferner denken wir uns φ nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$\varphi=\sum_1^\infty{}^n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m g_n^m(t)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{im\lambda}.\tag{47}$$

Dann folgt aus (45) nach Anwendung der Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen und der Kugelfunktionen:

$$-n(n+1)\cdot\frac{4}{(2n+1)}\cdot g_n^m=\frac{4}{(2n+1)}R_n^m+\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\operatorname{grad} W\cdot\operatorname{grad})\varphi\cdot P_n^m(\cos\vartheta')\,e^{-im\lambda'}\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\lambda',$$

wobei die Ad. Schmidtschen P_n^m verwendet wurden, die durch

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\vartheta')^2\sin\vartheta'\,d\vartheta'=\frac{4}{(2n+1)}$$

normiert sind (Ad. Schmidt, 28, S. 281).

[1]) Ob mit dieser Gl. (44), die ja eine Beziehung zwischen luftelektrischen Daten und Erdstrom gibt, das gesuchte "missing link" der von L. A. Bauer (7) aufgewiesenen Korrelation zwischen Erdstrom und luftelektrischen Erscheinungen gefunden ist, vermag ich nicht zu entscheiden.

Somit ergibt sich nach (47):

$$\varphi = -\sum_{1}^{\infty}{}^{n} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \frac{R_n^m(t)}{n(n+1)} \cdot P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda} - \sum_{1}^{\infty}{}^{n} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \frac{(2n+1)}{4 \cdot n \cdot (n+1)} \cdot P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\text{grad } W.\ \text{grad})\, \varphi \cdot e^{-im\lambda'} P_n^m(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\lambda'. \tag{48}$$

Wir führen die zufolge (46) nur bekannte Größen enthaltende Funktion

$$V = -\sum_{1}^{\infty}{}^{n} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \frac{R_n^m(t)}{n(n+1)} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda} \tag{49}$$

ein, die Potentialcharakter hat, da sie der Poissonschen Gleichung

$$\Delta^* V = \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial W}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right)$$

genügt; weil $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \frac{\partial W}{\partial \lambda}$ dimensionslos sind (ϑ, λ im Bogenmaß), ψ nach (42) aus dem magnetischen Potential ableitbar ist, hat auch V die Dimension eines Potentials. Aus (48) und (49) folgt die gesuchte Integro-Differentialgleichung für φ:

$$\varphi = V + Q\{\varphi\}, \tag{50}$$

unter $Q\{\ldots\}$ den Operator

$$Q\{\ldots\} \equiv$$

$$\equiv -\sum_{1}^{\infty}{}^{n} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \frac{(2n+1)}{4 \cdot n(n+1)} \cdot P_n^m(\cos\vartheta) \cdot e^{im\lambda} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\text{grad } W \cdot \text{grad})\{\ldots\} \cdot P_n^m(\cos\vartheta')\, e^{-im\lambda'} \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\lambda' \tag{51}$$

verstanden, in dem (grad W · grad) nur auf $\{\ldots\}$ wirkt.

4. Lösung der Integro-Differentialgleichung durch Entwicklung nach Multipol-Potentialen.

Wir setzen in (45):

$$(\text{grad } W \cdot \text{grad})\, \varphi = \Delta^* \varphi_1, \tag{52}$$

dann wird

$$\Delta^*(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial W}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right),$$

also

$$\varphi - \varphi_1 = V = -\sum_{1}^{\infty}{}^{n} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} \frac{R_n^m(t)}{n(n+1)} \cdot P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\lambda},$$

d. h.

$$\varphi = V + \varphi_1. \tag{53}$$

Substituieren wir (53) in (52), so folgt:

$$\Delta^* \varphi_1 = (\text{grad } W \cdot \text{grad})\ V + (\text{grad } W \cdot \text{grad})\, \varphi_1. \tag{54}$$

Wir setzen

$$\Delta^* \varphi_2 = (\text{grad } W \cdot \text{grad})\, \varphi_1, \tag{55}$$

also

$$\Delta^*(\varphi_1 - \varphi_2) = (\text{grad } W \cdot \text{grad})\ V.$$

Wie man leicht verifiziert, ist die Lösung:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Q\{V\},$$

d. h.

$$\varphi_1 = Q\{V\} + \varphi_2. \tag{56}$$

Substituieren wir (56) in (55), so folgt:

$$\Delta^* \varphi_2 = (\text{grad } W \cdot \text{grad})\ Q\{V\} + (\text{grad } W \cdot \text{grad})\, \varphi_2$$

und, wenn wir

$$\Delta^* \varphi_3 = (\text{grad } W \cdot \text{grad})\, \varphi_2$$

setzen:

$$\Delta^*(\varphi_2 - \varphi_3) = (\text{grad } W \cdot \text{grad})\ Q\{V\}.$$

Lösung:

$$\varphi_2 - \varphi_3 = Q^2\{V\}, \tag{57}$$

unter $Q^2\{V\}$ die zweimalige Anwendung des Operators (51) auf die Potentialfunktion (49) verstanden. Indem wir derart mit der sukzessiven Approximation fortfahren, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_1 &= \quad V. \quad \text{(Gl. 53)} \\
\varphi_1 - \varphi_2 &= Q\{V\}, \quad \text{(Gl. 56)} \\
\varphi_2 - \varphi_3 &= Q^2\{V\}, \quad \text{(Gl. 57)} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1} &= Q^\nu\{V\}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Nun enthält φ nach (46) und (48) die ersten Ableitungen von $W = \ln w$, dann enthält nach (52) φ_1 zweite Ableitungen von W und Quadrate der ersten Ableitungen, φ_2 nach (55) dann dritte Ableitungen von W, dritte Potenzen der ersten Ableitungen sowie Produkte der ersten und zweiten Ableitungen usw., weshalb wir annehmen wollen, daß wenigstens von einem bestimmten ν an

$$|\varphi_{\nu+1}| < |\varphi_\nu|$$

gesetzt werden kann. Dann ist

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{|\varphi_{\nu+1}|}{|\varphi_\nu|} < 1,$$

mithin

$$\sum_0^\infty{}^\nu |\varphi_\nu| \qquad \text{konvergent,}$$

d. h.

$$\sum_0^\infty{}^\nu \varphi_\nu \qquad \text{absolut konvergent,}$$

und es gilt:

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = 0. \tag{59}$$

Durch Addition der Gleichungen (58) folgt nun:

$$\varphi - \varphi_{\nu+1} = \sum_0^\nu{}^\nu Q^\nu\{V\},$$

wobei $Q^0\{V\}$ keinmalige Anwendung des Operators Q bedeuten möge, d. h. $Q^0\{V\} = V$. Dann gilt:

$$\varphi = \sum_0^\infty{}^\nu Q\{V\} + \lim_{\nu \to \infty} \varphi_{\nu+1},$$

also wegen (59):

$$\varphi = \sum_0^\infty{}^\nu Q^\nu\{V\}, \tag{60}$$

womit die Lösung der Integro-Differentialgleichung (50) in Form einer nach Multipol-Potentialen fortschreitenden Reihe gewonnen ist. Denn da V ein skalares Potential bedeutet, ist (grad W · grad) V ein Dipol-Potential (Dipolmoment = grad W), $Q\{V\}$ ist eine Dipol-Potentialentwicklung nach Kugelfunktionen unter Reduktion der Momente (wegen des Faktors $1/n(n+1)$; dann ist $Q^2\{V\}$ eine entsprechende Quadrupol-Potentialentwicklung usw.

Das allgemeine Problem ist somit durch die Gleichungen (43) und (60) mit den Zwischenrechnungen (46) und (49) vollständig gelöst. Für die numerische Berechnung ist die gefundene Multipol-Potentialentwicklung insofern besonders zweckmäßig, weil sich jedes Glied $Q^\nu\{V\}$ aus dem vorhergehenden durch einmalige Anwendung des Operators Q unmittelbar ergibt: $Q^\nu\{V\} = Q\{Q^{\nu-1}\{V\}\}$.

5. Konvergenzbeweis.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß

1. $\sum_0^\infty{}^\nu Q^\nu\{V\}$ gleichmäßig konvergiert, damit die in (53) geforderten Differentiationen gliedweise ausführbar sind,

2. die Gleichung (60) wirklich die Lösung der Integro-Differentialgleichung (50) darstellt.

Beweis zu 1: Durch

$$\sum_{0}^{\infty n}\sum_{-\infty}^{+\infty m}\frac{(2n+1)}{4}\cdot P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{im\lambda}\iint_{0\,0}^{\pi\,2\pi}(\mathrm{grad}\,W\cdot\mathrm{grad})\{\ldots\}\cdot P_n^m(\cos\vartheta')\,e^{-im\lambda'}\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\lambda',$$

wird das auf der Kugeloberfläche mit seinen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Dipol-Potential $(\mathrm{grad}\,W\cdot\mathrm{grad})\{\ldots\}$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt (Courant-Hilbert, 11, I. Bd., S. 422); dann gilt die Konvergenzaussage auch für den Operator

$$\equiv Q\{\ldots\}=\sum_{0}^{\infty n}\sum_{-\infty}^{+\infty m}\frac{(2n+1)}{4\cdot n(n+1)}\cdot P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{im\lambda}\iint_{0\,0}^{\pi\,2\pi}(\mathrm{grad}\,W\cdot\mathrm{grad})\{\ldots\}\,P_n^m(\cos\vartheta')\,e^{-im\lambda'}\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\lambda',$$

da die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty n}\frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert, denn jedes Glied derselben ist kleiner als das entsprechende der konvergenten Reihe

$$\sum_{1}^{\infty n}\frac{1}{n^2},$$

die den Spezialfall $s=2$ der für jedes $s>1$ konvergenten Reihe

$$\sum_{1}^{\infty n}\frac{1}{n^s}$$

darstellt (Riemann-Weber, 27, Bd. I, S. 55). Also ist auch

$$\varphi=\sum_{0}^{\infty\nu}Q^\nu\{V\}=V+\sum_{1}^{\infty\nu}Q^\nu\{V\}=V+Q\left\{\sum_{0}^{\infty\nu}Q^\nu\{V\}\right\}\qquad(61)$$

absolut und gleichmäßig konvergent, w. z. b. w.

Beweis zu 2.: Wird $\varphi=\sum_{0}^{\infty\nu}Q^\nu\{V\}$ in (61), d. h. in $V+Q\left\{\sum_{0}^{\infty\nu}Q^\nu\{V\}\right\}$ substituiert, so ergibt sich in Übereinstimmung mit (50):

$$\varphi=V+Q\{\varphi\},$$

womit alles bewiesen ist.

Literatur-Verzeichnis.

1. M. Abraham und R. Becker, Theorie der Elektrizität. 8. Aufl., Bd. I. Leipzig-Berlin 1930.
2. G. Angenheister und J. Bartels, Das Magnetfeld der Erde. Handb. d. Exp.-Phys., herausgegeben von Wien und Harms, Bd. 25, I. Teil, S. 527—684.
3. J. Bartels, Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. Lehrbuch der Geophysik, herausgegeben von B. Gutenberg. Berlin 1929, S. 378—433.
4. J. Bartels, Erdmagnetische und elektrische Aufschlußverfahren. Ebenda, S. 553—581.
5. J. Bartels und F. Bidlingmaier, Die tägliche Schwankung des Erdmagnetismus während eines Sonnenflecken-Minimums und ihre Abhängigkeit von der geographischen Länge. Dt. Südpolar-Exp., Bd. VI, Erdmagn. II, S. 423—435.
6. J. Bartels and W. J. Rooney, A typical case of variability of quiet-day diurnal variation in terrestrial magnetism and earth-currents at Watheroo. Terr. Magn. 37, 1932, S. 53—55.
7. L. A. Bauer, Relations between the diurnal and annual variations of earth-currents, terrestrial magnetism and atmospheric electricity. Terr. Magn. 28, 1923, S. 129—140.
8. S. Chapman, The solar and lunar diurnal variations of terrestrial magnetism. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 218, 1919.
9. S. Chapman and T. T. Whitehead, The influence of electrically conducting material within the earth on various phenomena of terrestrial magnetism. Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. XXII, Nr. 25, S. 463—482 (1922).
10. S. Chapman and T. T. Whitehead, On the observations of the earth potential-gradients at Ebro. Terr. Magn. 28, 1923, S. 125—128.
11. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik. I. Bd. Berlin 1924.
12. P. Debye, Stationäre und quasistationäre Felder. Enzykl. der Math. Wiss., V. Bd., 2. Teil, S. 395—482.
13. O. H. Gish, General description of the earth-current measuring system at the Watheroo Magnetic Observatory. Terr. Magn. 28, 1923, S. 89—108.
14. O. H. Gish and W. J. Rooney, Measurements of large masses of undisturbed earth. Ebenda, 30, 1925, S. 161—188.
15. O. H. Gish and W. J. Rooney, On earth-current observations at Watheroo Magnetic Observatory. Ebenda, 33, 1928, S. 79—90.
16. O. H. Gish and W. J. Rooney, Results of earth-current observations at Huancayo Magnetic Observatory. Ebenda, 35, 1930, S. 213—224.
17. H. Hertz, Über die Induktion in rotierenden Kugeln. Inaug.-Diss. Berlin 1880.
18. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Leipzig 1887.
19. A. Nippoldt, Erdmagnetismus und Polarlicht. Einführung in die Geophysik, II. Bd. (Springer). Berlin 1929, S. 1—168.
20. A. Nippoldt, Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. 3. Aufl. Berlin 1921. (Samml. Göschen Nr. 175).
21. H. Poincaré, Sur la série de Laplace. Comptes Rendus, Tome 118, Paris 1894, S. 497—501.
22. A. T. Price, Electromagnetic induction in a conducting sphere. Proc. London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 31, Part. 3, S. 217—224 (1929).
23. I. Puig, Las corrientas telurícas en Tortosa. Asociacion Espanola para el Progreso de las Ciencias. Madrid 1927, S. 63—82.
24. W. J. Rooney, Earth-resistivity measurements in the Copper Country. Terr. Magn. 32, 1927, S. 97—126.
25. W. J. Rooney and O. H. Gish, Results of earth-resistivity surveys near Watheroo, Western Australia, and at Ebro, Spain. Ebenda, S. 49—63.
26. W. J. Rooney and O. H. Gish, Earth-resistivity survey at Huancayo, Peru. Ebenda, 35, 1930, S. 61—72.
27. B. Riemann und H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 6. Aufl. Braunschweig 1919.
28. Ad. Schmidt, Erdmagnetismus. Enzykl. d. Math. Wiss., VI. Bd., 1. Teil, S. 266—396.
29. E. Schweidler, Luftelektrizität. Einführung in die Geophysik, II. Bd. (Springer). Berlin 1929, S. 291—375.
30. A. S. Sloutchanovsky, Regarding the theory of the outward magnetic field. Bull. de l'Observat. Géoph. Central (Leningrad), 1931, Nr. 3, S. 9—14.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 3

I. Teil: Spezielle Theorie der durch ortszeitlich variierendes Potential induzierten Erdströme in einer Rindenschicht mit räumlich rasch variierender Leitfähigkeit 4

1. Voraussetzungen und Grundgleichungen 4
2. Lösung 7
3. Erweiterung der Lösung durch Berücksichtigung der Anisotropie des Untergrundes 9
4. Diskussion der Lösung 9
5. Eine andere einfache Ableitung der Chapmanschen Formeln 11

II. Teil: Allgemeine Theorie der durch Variationen des magnetischen Potentials induzierten Erdströme in einer Rindenschicht mit beliebiger Leitfähigkeitsverteilung 12

1. Die notwendigen Verallgemeinerungen 12
2. Lösung (ohne spezielle Bestimmung des elektrostatischen Potentials φ) 13
3. Integro-Differentialgleichung für φ 14
4. Lösung der Integro-Differentialgleichung durch Entwicklung nach Multipol-Potentialen 15
5. Konvergenzbeweis 16

Literatur-Verzeichnis 18

Lebenslauf.

Am 24. März 1904 wurde ich als Sohn des Drechslermeisters Richard Ertel zu Berlin geboren. Ich besuchte die Seminarschule und das Lehrerseminar zu Berlin-Köpenick, trat Juni 1926 als Rechner in das Preußische Meteorologische Institut ein und studierte 1929—1932 auf Grund der „Zulassungsprüfung zum Hochschulstudium ohne Reifezeugnis" an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin sechs Semester Meteorologie, Ozeanographie, Geophysik, Physik, Mathematik und Philosophie. Von meinen akademischen Lehrern fühle ich mich ganz besonders den Herren Professoren Bartels, Bieberbach, Defant, v. Ficker, Hch. Maier und v. Mises zu Dank verpflichtet, vor allem Herrn Professor v. Ficker, dessen Unterstützung mir das Studium überhaupt erst ermöglichte.

Buchdruckerei des Waisenhauses G. m. b. H., Halle (Saale).